

Zapomniana myśl Artura Stanleya Eddingtona Model gwiazdy z $\rho(0)=0$

The density at the centre [of star] is zero, the mass being driven away by the intense radiation pressure ...*)

Model gwiazdy

$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi\rho r^2$	równanie masy
$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r\rho}{r^2}$	równanie równowagi hydrostatycznej
$P = \frac{k}{\mu m_H}\rho T + \frac{1}{3}aT^4$	równanie stanu
$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi\rho\epsilon r^2$	równanie produkcji energii
$\frac{dT}{dr} = -\frac{3k\rho L_r}{16\pi acT^3r^2}$	radiacyjna wymiana ciepła

Fundamentalne **nieudowodnione** założenie modelu standardowego/politropowego to $\frac{d\rho}{dr} \leq 0$ **)
Konsekwencją tego założenia jest $\rho(0) = \rho_{\max} \approx 150 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$.

Porównanie modeli

Parametr	Model $\rho(0) = 0$	Model standardowy
$\rho(0) [\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}]$	0.0	153.5
$\rho_{\max} [\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}]$	3.64	153.5
$P(0) [10^{14}\text{Pa}]$	2.91	235.5
$T(0) [10^6\text{K}]$	32.6	15.8
$g_{\max} [g_z]$	-50.0	-240.4

Model Słońca $\rho(0)=0$ Dane $R_{\odot}, M_{\odot}$ i $L_{\odot}$

$\rho(x_l) = \omega \times [T_n^*(x_l)]_{58 \times 58}$
 $T_n^*(x_l)$ przesunięte wielomiany Czebyszewa stopnia $n \quad n = 0, 1, 2, \dots, 57$
 x_l dyskretny podział przedziału $[0,1]$
 $x_l = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{l\pi}{57}\right) \quad l = 0, 1, 2, \dots, 57$
wektor $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{57})$
został znaleziony metodą iteracji wielowymiarowych

$M_r(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\tau) \tau^2 d\tau$	równanie masy
$P(r) = G \int_1^r \frac{M_r(\tau)}{\tau^2} \rho(\tau) d\tau$	równanie równowagi hydrostatycznej
$P = \frac{k}{\mu m_H}\rho T + \frac{1}{3}aT^4$	równanie stanu
$L_r(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\tau) \epsilon(\tau) \tau^2 d\tau$	równanie produkcji energii
$\epsilon_{PP} = 2,5 \cdot 10^6 \rho X^2 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \exp^{-33,8\left(\frac{10^6}{T}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{**})$	
$\epsilon_{CN} = 9,5 \cdot 10^{28} \rho X X_{CN} \left(\frac{10^6}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \exp^{-152,3\left(\frac{10^6}{T}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{**})$	

$X = 0,7$ – względna zawartość masowa wodoru
 $X_C = 0,0031$ – zawartość węgla
 $X_N = 0,0006$ – zawartość azotu

Otrzymano 5 funkcji: P, ρ, T, M_r i L_r

Model wylicza $P(0), T(0)$ i $L_r(R_{\odot})$

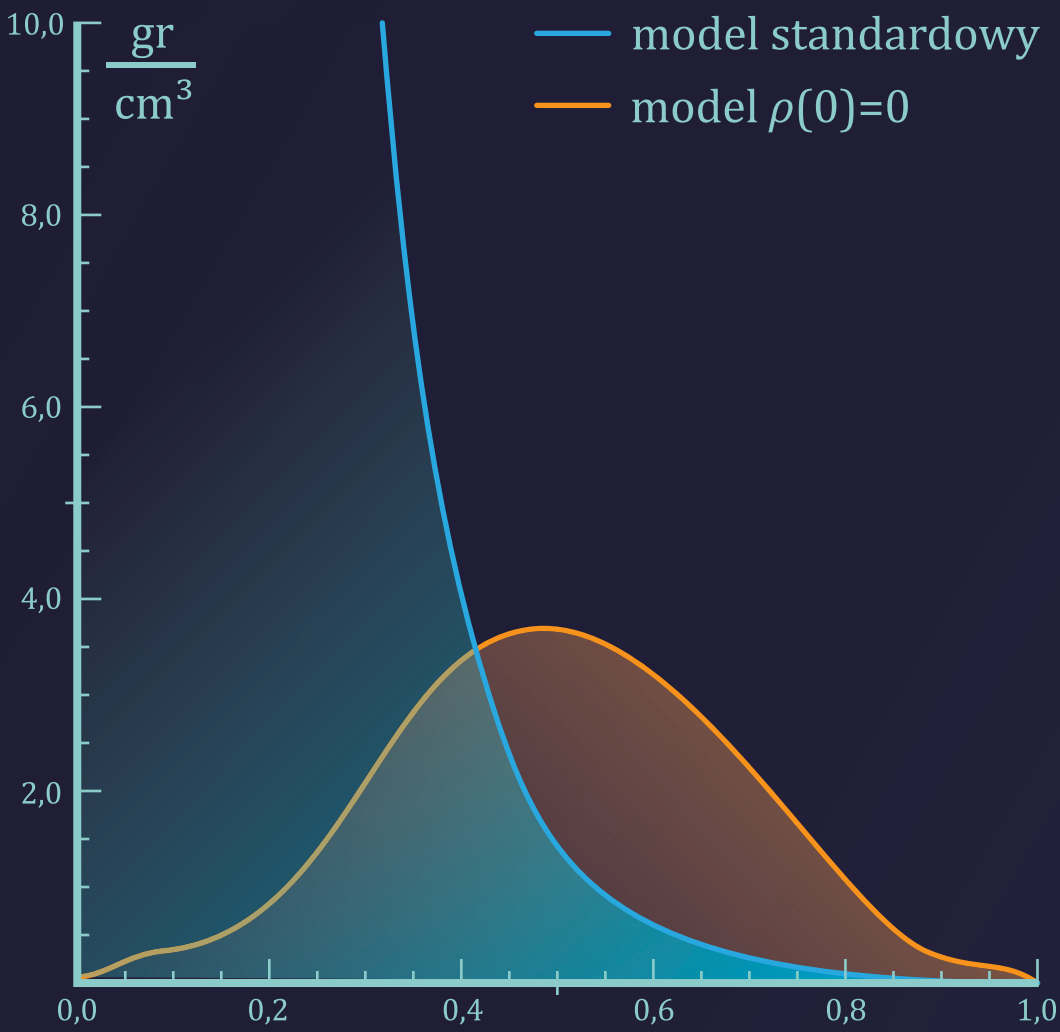
Wektor ω

l	ω_l	l	ω_l
0	1.15473580602016	29	$6,10772570916799 \cdot 10^{-4}$
1	$1,17657983711084 \cdot 10^{-2}$	30	$-5,38278844748789 \cdot 10^{-4}$
2	-1.66637904709909	31	$2,25309063262205 \cdot 10^{-4}$
3	$-2,40950194599457 \cdot 10^{-2}$	32	$-2,76700104014182 \cdot 10^{-4}$
4	0.68524422954522	33	$6,93487395127253 \cdot 10^{-4}$
5	$1,17696936848823 \cdot 10^{-2}$	34	$-9,17098475378676 \cdot 10^{-4}$
6	-0.167125479166517	35	$-4,88545704459417 \cdot 10^{-4}$
7	$5,84353131728076 \cdot 10^{-2}$	36	$-2,56509638798125 \cdot 10^{-4}$
8	$-2,23468189656253 \cdot 10^{-2}$	37	$4,55957995157603 \cdot 10^{-4}$
9	$-5,64401625652948 \cdot 10^{-2}$	38	$1,41999498068841 \cdot 10^{-3}$
10	$2,03251032870973 \cdot 10^{-2}$	39	$-1,15862116871697 \cdot 10^{-3}$
11	$1,71539734456602 \cdot 10^{-3}$	40	$-1,17562155592797 \cdot 10^{-11}$
12	$-3,68553385635061 \cdot 10^{-3}$	41	$2,13254689488897 \cdot 10^{-12}$
13	$-1,29328906348253 \cdot 10^{-3}$	42	$1,57384615737091 \cdot 10^{-3}$
14	$2,15002057882278 \cdot 10^{-3}$	43	$-1,47120406482866 \cdot 10^{-4}$
15	$-1,40534140516631 \cdot 10^{-3}$	44	$-1,5555986656936 \cdot 10^{-3}$
16	$-1,68749349855761 \cdot 10^{-4}$	45	$4,86161057677859 \cdot 10^{-12}$
17	$2,93167211446924 \cdot 10^{-4}$	46	$-1,1441890177436 \cdot 10^{-12}$
18	$5,95105479139813 \cdot 10^{-4}$	47	$-1,76610189800836 \cdot 10^{-3}$
19	$6,31059401586514 \cdot 10^{-4}$	48	$-2,71156714726035 \cdot 10^{-11}$
20	$-7,02568079417339 \cdot 10^{-4}$	49	$1,62453450397797 \cdot 10^{-3}$
21	$-1,12758186139065 \cdot 10^{-3}$	50	$7,09978964653433 \cdot 10^{-13}$
22	$-4,65318359302527 \cdot 10^{-4}$	51	$3,62957119486794 \cdot 10^{-12}$
23	$1,40707064898685 \cdot 10^{-3}$	52	$-1,13430233319195 \cdot 10^{-11}$
24	$-1,20025013645627 \cdot 10^{-3}$	53	$2,59241157544618 \cdot 10^{-12}$
25	$-3,05601626579142 \cdot 10^{-3}$	54	$8,60048001345072 \cdot 10^{-7}$
26	$-1,07180876118453 \cdot 10^{-3}$	55	$1,12936290039304 \cdot 10^{-7}$
27	$1,35043171513659 \cdot 10^{-3}$	56	$-8,60048001837291 \cdot 10^{-7}$
28	$6,45653504589395 \cdot 10^{-4}$	57	$-3,06229730209787 \cdot 10^{-7}$

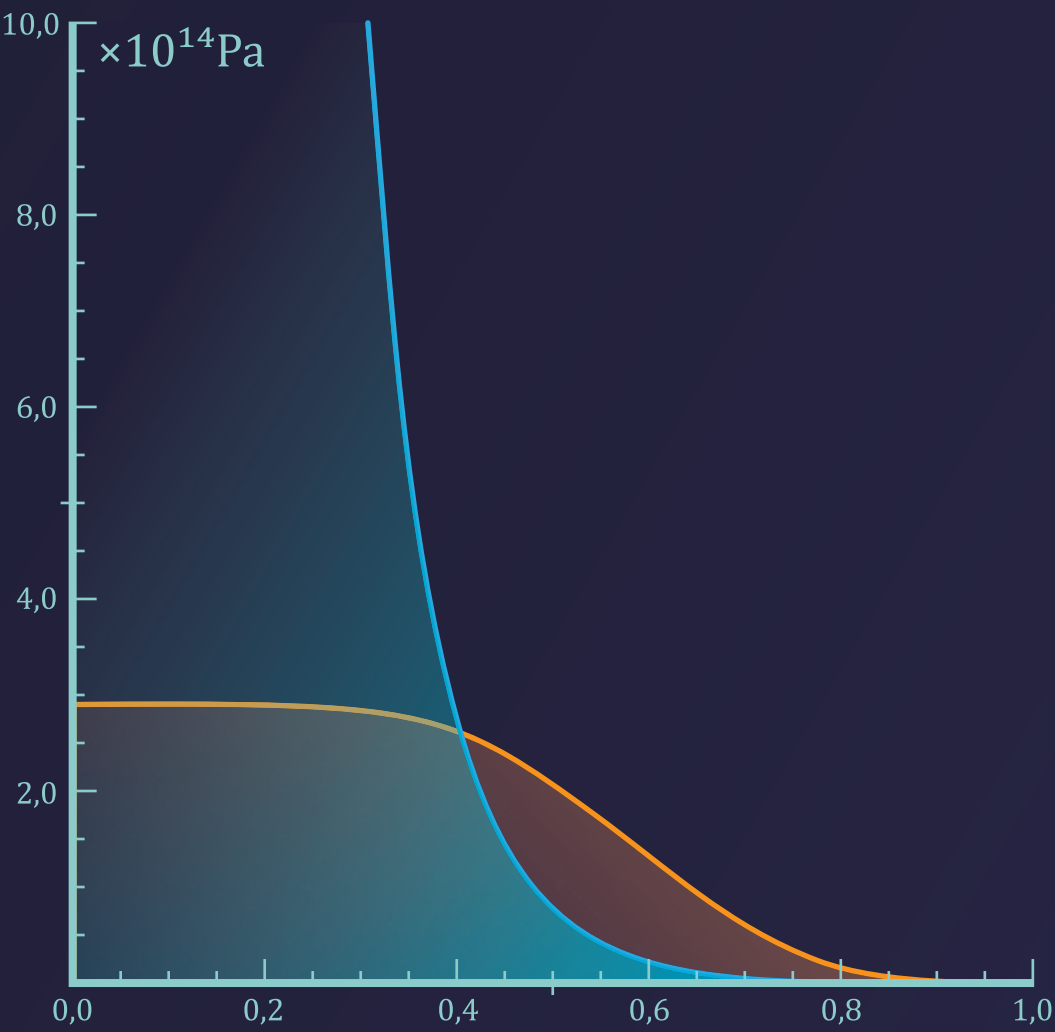
Zagadnienie równowagi modelu $\rho(0)=0$

Model spełnia twierdzenie o wirale, ***)
Model spełnia 1., 2., 3. i 5. twierdzenie równowagi zaprezentowane przez S. Chandrasekhar’a.

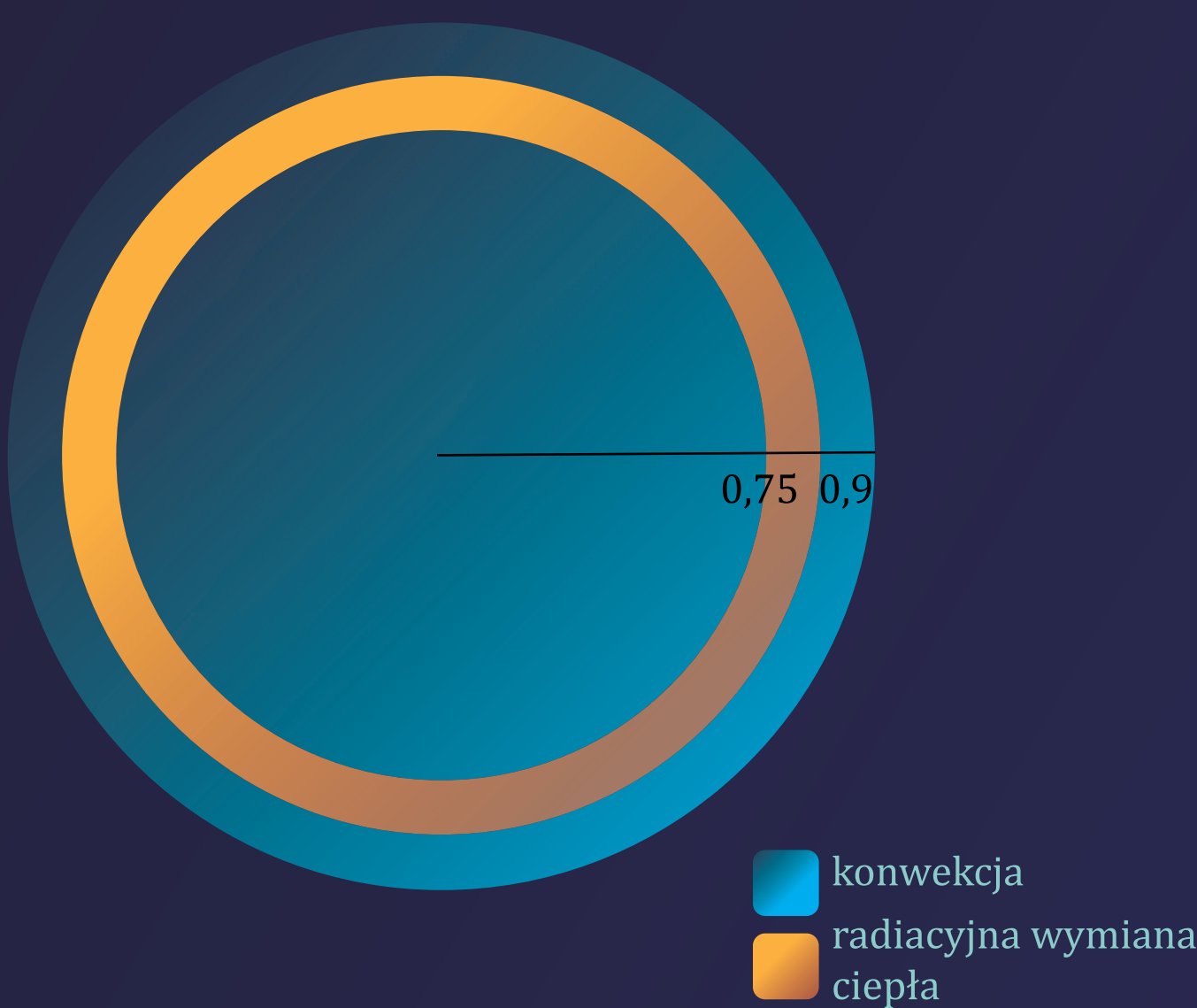
Gęstość $\rho(r)$



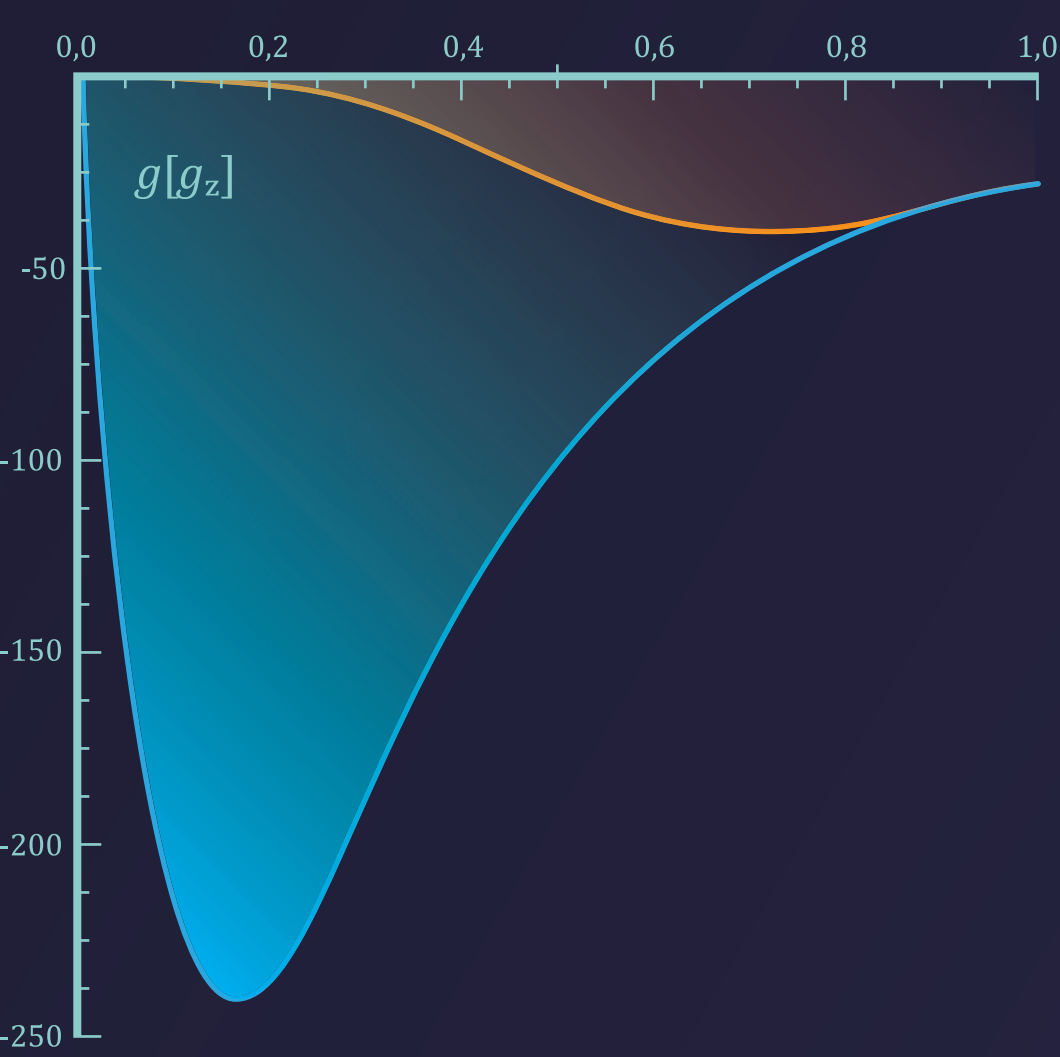
Ciśnienie $P(r)$



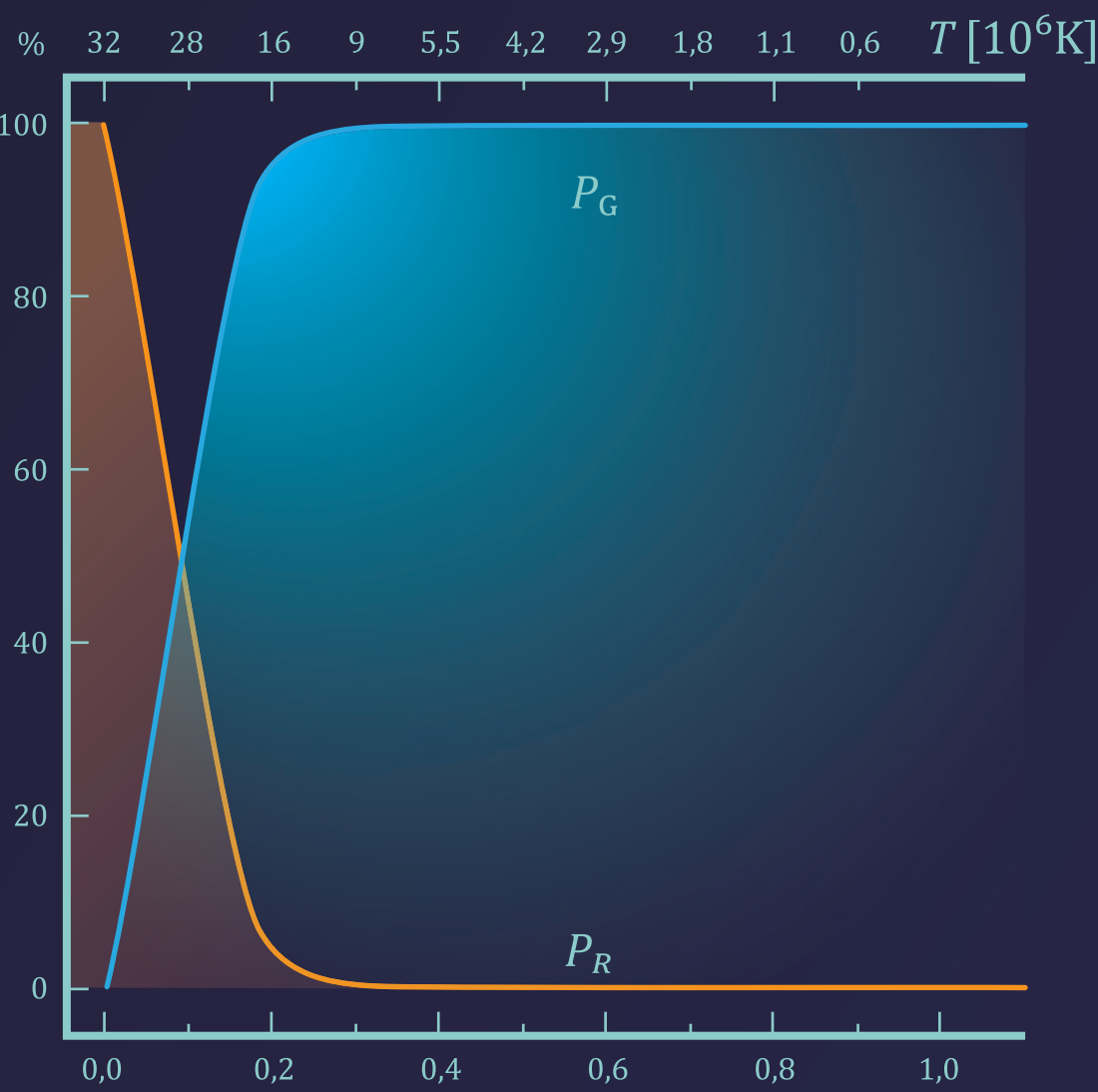
Transport energii



Przyspieszenie grawitacyjne $g(r)$



Procentowy udział $P_R(r)$ i $P_G(r)$



Twierdzenie

T: W centrum samograwitującego, sferycznie symetrycznego rozkładu masy $\rho(0) = 0$.
D: Prawo Gaussa $\text{div} \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$
We współrzędnych sferycznych
 $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 g) = -4\pi G\rho$ stąd $\left. \frac{dg}{dr} \right|_{r=0} = -\frac{4}{3} \pi G\rho(0)$.
Ponieważ $\left. \frac{dg}{dr} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow \rho(0) = 0$ c.b.d.o.
Model politropowy/standardowy jest sprzeczny z prawem Gaussa.

Kolaps grawitacyjny

-jest sprzężeniem zwrotnym ujemnym:wzrost ciśnienia wywołanego siłą grawitacji jest przyczyną wzrostu przeciwnie skierowanego ciśnienia wewnętrznego. Ten mechanizm działa do uzyskania równowagi przy najmniejszej wartości ciśnienia. Tak więc Słońce w procesie kolapsu grawitacyjnego osiągnęło równowagę przy $P \approx 3 \cdot 10^{14} \text{Pa}$. Model standardowy o $P \approx 240 \cdot 10^{14} \text{Pa}$ nie może powstać w procesie kolapsu grawitacyjnego.



*) A. S. Eddington "The Internal Constitution of the Stars", 1926 p. 125
**) M. Schwarzschild, "Structure and evolution of the stars", 1958 p. 81
***) S. Chandrasekhar "An introduction to the study of stellar structure", 1939, rozdział III