**NUMER IDENTYFIKACYJNY // CONTRIBUTION ID**

**Równanie g-subdyfuzji jako uniwersalne równanie dyfuzji anomalnej**

Tadeusz Kosztołowicz1

1 *Instytut Fizyki, Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach*

[tadeusz.kosztolowicz@ujk.edu.pl](mailto:tadeusz.kosztolowicz@ujk.edu.pl)

Procesy dyfuzji anomalnej różnią się jakościowo od dyfuzji normalnej. Równanie dyfuzji normalnej jest parabolicznym cząstkowym równaniem różniczkowym z pochodnymi pierwszego rzędu względem czasu i – w układzie jednowymiarowym – drugiego rzędu względem zmiennej przestrzennej. Procesy dyfuzji anomalnej zazwyczaj opisane są przez równania z pochodnymi ułamkowymi, Pochodne ułamkowe można zdefiniować jako operator różniczkowo-całkowy zależny od ciągłego parametru definiującego rząd pochodnej. Gdy ten parametr jest liczbą naturalną *n*, operator jest równoważny „zwykłej” pochodnej rzędu *n*. Istnieje wiele pochodnych ułamkowych nierównoważnych sobie. W ramach standardowego stochastycznego modelu błądzenia losowego cząsteczki superdyfuzja występuje gdy anomalnie długie przeskoki cząsteczki wykonywane są ze względnie dużymi prawdopodobieństwami, co ma miejsce np. w ośrodkach turbulentnych. Superdyfuzja opisana jest zwykle równaniem z ułamkową pochodną Riesza względem zmiennej przestrzennej, która ma charakter nielokalny. Stwarza to problemy m.in. w zadawaniu lokalnych warunków brzegowych na częściowo przepuszczalnych membranach. W procesie subdyfuzji czas oczekiwania na przeskok cząsteczki jest anomalnie długi, co występuje np. w gęstych żelach i biofilmach bakteryjnych. Subdyfuzja opisana jest równaniami z pochodną ułamkową Caputo (lub Riemanna-Liouville’a) względem czasu.

W artykułach [1] zostało wprowadzone równanie g-subdyfuzji, które zawiera tzw, pochodną ułamkową Caputo względem funkcji g. Proces opisywany tym równaniem interpretowany jest jako subdyfuzja ze zmienioną zmienną czasową przez funkcję g. Wybierając w odpowiedni sposób funkcję g można modelować różne rodzaje dyfuzji: dyfuzję normalną, subdyfuzję, powolną subdyfuzję, superdyfuzję, a także gładkie przejścia pomiędzy tymi procesami [1,2]. Ponieważ w równaniu g-subdyfuzji nie występuje ułamkowa pochodna przestrzenna, można rozważać lokalne warunki brzegowe nawet dla superdyfuzji. Pokazana została także użyteczność równania g-subdyfuzji w opisie uwalniania antybiotyków z gęsto upakowanych kulek żelowych i ich dalszej dyfuzji w układzie, gdzie rozwiązania równania g-subdyfuzji dobrze opisują wyniki empiryczne [3].

**Bibliografia**

[1] T. Kosztołowicz, A. Dutkiewcz, Phys. Rev. E **104**, 014118 (2021); **104**, L042101 (2021); **106**, 044119 (2022).

[2] T. Kosztołowicz, Phys. Rev. E **106**, 022104 (2022); **107**, 064103 (2023); **108**, 014132 (2023); Entropy 27(1), 48 (2025).

[3] T. Kosztołowicz *et al.*, Phys. Rev. E **106**, 044138 (2022).